Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации
Новосибирский Государственный Технический Университет

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Лекции для студентов специальности 22.02
III – IV курсов дневного и заочного отделений

Новосибирск 1998

Составитель: *к.т.н., доцент Кошкин Ю.Н.*

Рецензент: *к.т.н., доцент Ренин С.В.*

Подготовка работы в электронном виде: *Краснопевцев С.Е.*

Работа подготовлена на кафедре автоматизированных систем управления Новосибирского Государственного Технического Университета

Введение

Основы Теории Управления (ОТУ), как наука, сформировалась на изучении процессов управления различными техническими устройствами. Изучение принципов построения и исследования систем управления в данном курсе будем проводить на основе рассмотрения разного рода технических систем. Однако, принципы управления имеют, несомненно, более широкий общий смысл и могут быть применены при исследовании, например, экономических, биологических, общественных и других систем.

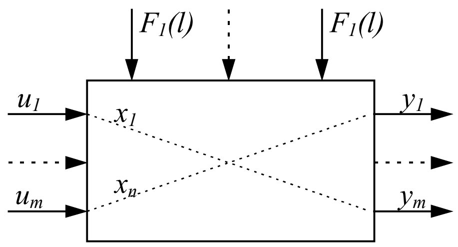
Общие понятия об управлении

Система автоматического управления может быть представлена двумя основными частями:

- *объектом управления* (ОУ);
- *управляющим устройством* (УУ).

В качестве объекта управления может применяться как силовое управляемое техническое устройство (эл.двигатель, генератор, ...), так и различные сложные системы (самолет, прокатный стан и т.д.).

В общем случае ОУ может быть представлен схемой (рис.1.), где на ОУ действует совокупность воздействий:



$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$ – вектор управляющих воздействий;

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{bmatrix}$$ – вектор возмущающих воздействий;

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$ – вектор выходных координат системы;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ – вектор состояния системы.

Используя аппарат векторно-матричного исчисления, в дальнейшем будем указывать все вектора в Евклидовом пространстве следующим образом: $U \in R^m$, $F \in R^l$, $Y \in R^m$, $X \in R^n$, т.е. число компонент каждого вектора, соответственно m, l, m, n.

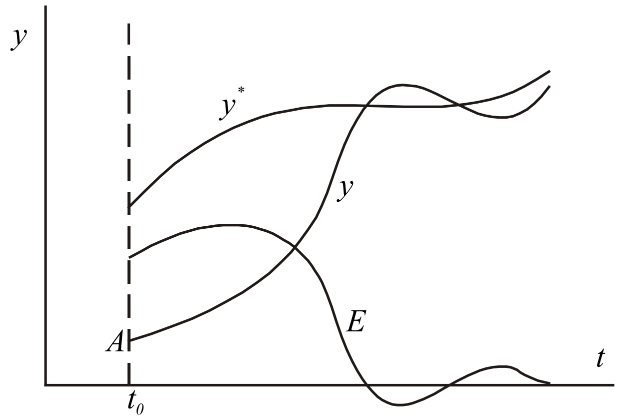
В зависимости от числа управляющих воздействий и выходных переменных все ОУ делятся на многосвязные и односвязные.

Если объект характеризуется одной управляющей и одной управляемой, т.е. векторы U и Y имеют по одной координате, то объект называется простым или односвязным (скалярным). При наличии нескольких взаимно связанных координат векторов U и Y, объект называется многосвязным.

Общие замечания по объектам

Сигналы управления и возмущения в общем случае могут быть не детерминированные а случайные, поэтому приходиться прибегать к статистическим методам исследования *систем автоматического управления* (САУ). Кроме того часть объектов функционирует и работает в конфликтных ситуациях.

Рассмотрим график изменения выходного вектора САУ во времени (рис.2.),



где y^* – желаемая траектория объекта управления.

В начальный момент t_0 система находилась в точке *A*. При включении системы управления выходная координата y под действием управляющих сигналов выходит на требуемую (желаемую) траекторию y^*. Разность

$$E(t) = y^*(t) - y(t)$$

называется ошибкой или рассогласованием САУ.

рис.2.

Задача *теории автоматического управления* (ТАУ) состоит:

1. Научиться проектировать системы управления, обеспечивающие минимальные допустимые для данного объекта ошибки $E(t)$;
2. Научиться проектировать системы управления, которые обеспечивают выход системы на желаемую траекторию за минимальное время, т.е. решается задача быстродействия соответствующим выбором системы управления.

Итак, в самом общем случае САУ, выполняющая поставленные выше задачи, может быть представлена в виде блок-схемы (рис.3).

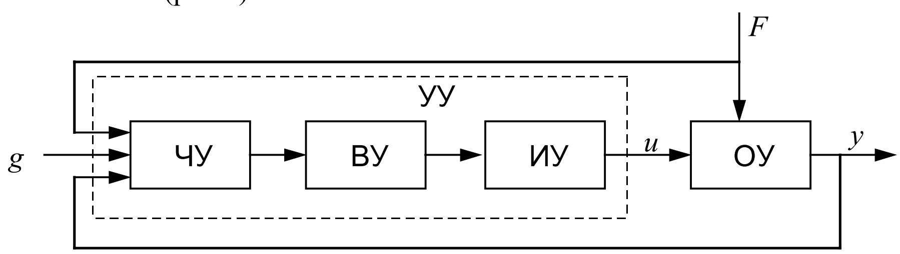


рис. 3

На вход управляющего устройства (УУ) поступает:

1. задающее воздействие g;
2. информация о текущем состоянии объекта в виде выходной величины y;
3. информация о действующем на ОУ возмущении F.

УУ вырабатывает, в соответствии с полученной информацией, определенное (по заданному алгоритму) управляющее воздействие u на объект.

В свою очередь УУ в общем случае состоит из:

- чувствительного устройства (ЧУ);
- вычислительного устройства (ВУ);
- исполнительного устройства (ИУ).

Чувствительное устройство (измерительные устройства, датчики) служат для измерения и преобразования подаваемых на УУ воздействий g, y, F.

Вычислительное устройство реализует алгоритм работы УУ. В простейших случаях оно осуществляет простые математические операции, такие как сравнения, т.е. разность $g - y - F$, операции интегрирования и т.п. В более сложных случаях вычислительное устройство может представлять собой ЭВМ и даже комплекс ЭВМ.

Исполнительные устройства предназначены для непосредственного управления ОУ. Например, для согласования мощности ВУ и ОУ необходимо применить усилитель мощности. В тех случаях, когда ИУ отсутствует, САУ называется прямого регулирования.

При наличии ИУ САУ называется непрямого регулирования.

Принципы построения систем автоматического управления

1. Принцип возмущения или регулирование по возмущению (рис.4).

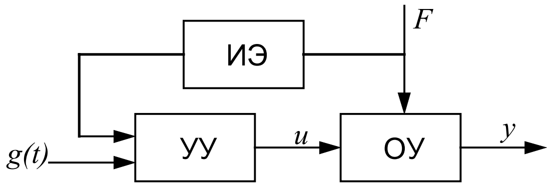


рис. 4

В системах построенных по данному принципу выходная координата y инвариантна по отношению к возмущению F, т.е. действующие на объект возмущения не приводят к отклонениям выходной координаты от требуемого закона.

Принцип действия таких систем состоит в том, что возмущения, действующие на ОУ заранее измеряются измерительным элементом (ИЭ) и подаются на вход УУ, которое вырабатывает сигнал управления уже с учетом действующего на объект возмущения.

Недостатком данного принципа является то, что для качественного управления необходимо иметь большое число предварительной информации о возмущающих воздействиях, что ограничивает применение таких систем.

2. Принцип отклонения или регулирование по отклонению (принцип обратной связи) (рис.5).

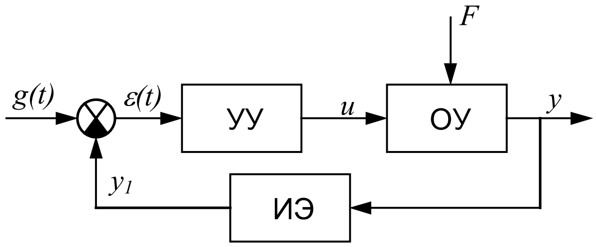
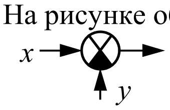
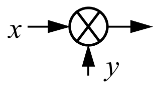


рис. 5

На рисунке обозначено:



– элемент сравнения ($x - y$);



– $(x + y)$.

В данном случае ошибка системы:

$$\varepsilon(t) = g(t) - y_1(t) \qquad (1)$$

Принцип действия: Пусть при увеличении возмущения F выходная координата объекта y уменьшается, что приводит к уменьшению y_1, следовательно возрастает ошибка ε из выражения (1) и соответственно управляющее воздействие u. Объект управления выравнивает значение выходной величины, т.е. y возрастает примерно до прежнего значения.

<u>Определения:</u>
1. Связь выхода звена САУ с его входом называется *обратной связью* (ОС).
2. Связь выхода системы с её входом называется *главной обратной связью* (ГОС).
3. Если сигнал ОС вычитается из входного, то ОС называется *отрицательной обратной связью* (ООС).
4. Если сигнал ОС складывается со входным, то ОС называется *положительной обратной связью* (ПОС).

Необходимо отметить, что в принципе отклонения главная обратная связь должна быть всегда отрицательной, т.е.

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) \qquad (2)$$

3. Если на объекте управления можно выбрать одно или два наиболее сильно действующих возмущения, которые можно измерить, то используют комбинированные системы, применяя оба названных принципа (рис.6).

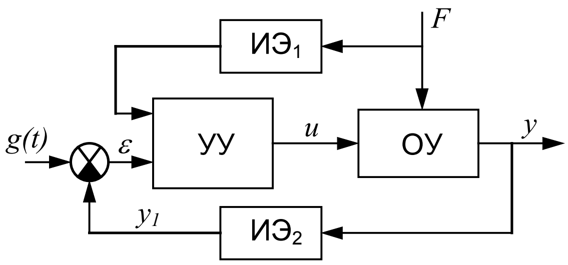


рис. 6

4. Принцип дуального управления или принцип автоматической оптимизации (рис.7).

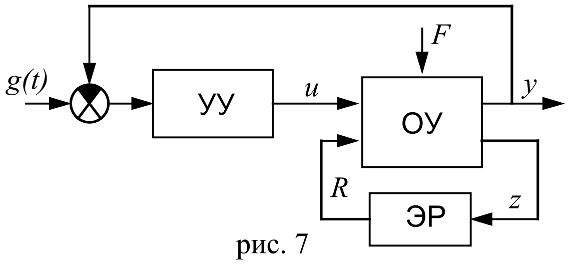


рис. 7

Дуальное управление исследует двойную цель – изучение объекта и одновременное приведение его к требуемому режиму.

Задача: Создать такую систему, чтобы при заданном управлении U и действии меняющихся возмущений, некоторый параметр объекта был экстремальный.

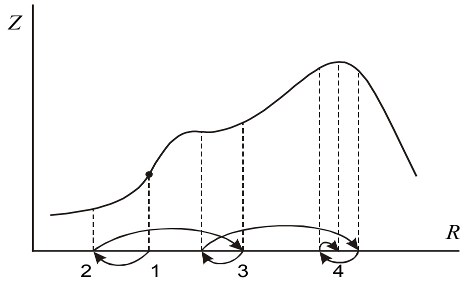


рис.8

Поясним сказанное рисунком 8. Экстремальный регулятор (ЭР) ”отслеживает” некоторую характеристику ОУ $z = f(R)$.

Допустим система работает в точке 1. Подается пробный сигнал, так что система переходит в точку 2, следовательно получили первый шаг, ложный. УУ реверсируется и дает положительное приращение шага в точку 3. Регулятор снова делает пробный шаг назад, чтобы не пропустить экстремума в точке 4.

Задачи ТАУ, классификация САУ, примеры

Весь курс ТАУ условно можно разделить на рассмотрение двух основных задач:

- Задача устойчивости САУ;
- Задача качества регулирования.

1. Решение об устойчивости или анализ систем сводится к решению о сходимости дифференциальных уравнений, которыми описывается поведение САУ. Однако такая задача, как известно, не всегда разрешима и поэтому для заключения вопроса устойчивости в ТАУ разработаны собственные методы решения, которые и будут изучены в первой трети части курса.
2. Задача качества регулирования или синтез систем является инженерной задачей, где приходится принимать компромиссные решения, следя за тем, чтобы качественные показатели выходной координаты во времени удовлетворяли заданным требованиям. Причем задача синтеза противоположна задаче анализа.

Классификация САУ

Классификация систем будет производиться для систем построенных по принципу отклонения (принцип ОС).

Все системы по своему математическому описанию делятся на два класса:

- линейные;

- нелинейные.

Линейных систем в природе нет, т.е. реально все существующие САУ нелинейны. Под линейными системами понимаются приближенные линейные математические модели реальных нелинейных систем. Большинство реальных систем можно свести к линейным, т.е. нелинейности в них являются несущественными (насыщение усилителей, петля гистерезиса и т.п.).

В тех случаях, когда нелинейности в САУ существенны и их нельзя линеаризовать, рассматриваются нелинейные модели, и применяются методы исследования нелинейной ТАУ.

В свою очередь линейные и нелинейные системы по принципу ОС делятся на три класса:

1. *Непрерывные системы*. Это такие системы, в которых контур ОС работает (функционирует) непрерывно во времени.

2. *Релейные системы* – более узкий класс систем, чем непрерывные. Это системы, где в контуре регулирования стоит релейный элемент (реле), т.е. контур обратной связи замыкается тогда, когда ошибка $|\varepsilon| \geq a$ (a – зона нечувствительности реле – наперёд заданная величина) и размыкается, когда ошибка $|\varepsilon| \leq b$ (отключение реле), где $a > b$. Отметим, что релейные системы существенно нелинейны и их нельзя заменять линейными математическими моделями. Для построения систем оптимальных по быстродействию (важный класс) в большинстве случаев используют системы с релейными элементами.

3. *Дискретные системы*. Это такие системы, в которых замыкание контура ОС происходит дискретно во времени. Кроме того, амплитуда входного сигнала может быть квантована по времени. Среди дискретных систем наибольшее применение получили импульсные системы регулирования и управления. Это такие системы, в которых происходит квантование ОС только по времени. Т.е. связи замыкаются с определенной, наперёд заданной частотой.

Математическое описание САУ

При исследовании САУ в ТАУ, как правило, имеют дело не с физическими объектами, а с их математическими моделями. Характеристики элементов САУ могут быть заданы аналитически, графически или в виде таблиц, которые позволяют определить поведение элемента или системы в любой момент времени.

Одной из наиболее распространенных форм записи математической модели поведения САУ являются дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных).

Для составления математической модели, как правило, необходимо проделать три этапа:

1. Выделить физические величины, которые наиболее полно и правильно отражают поведение элемента;
2. Исходя из физической природы работы элемента составить функциональные связи между выделенными физическими величинами;
3. Полученную математическую модель привести к стандартному виду, с точки зрения процессов управления.

<u>Пример:</u> Для электрической схемы (рис.9) составить математическое описание.

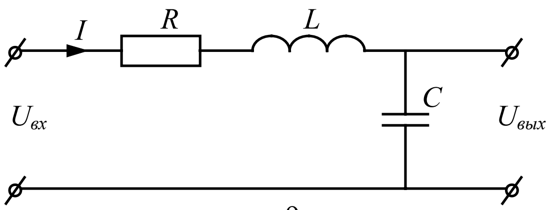


рис. 9

$$\begin{cases} U_{вх} = U_R + U_L + U_C = IR + L\dfrac{dI}{dt} + U_C, \\ U_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I(t)dt, \end{cases}$$

$$U_{вых} = U_C.$$

Перейдем к стандартной форме Коши: $x_1 = I$; $x_2 = U_C = U_{вых}$ тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{L}(U_{вх} - Rx_1 - x_2); \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1. \end{cases}$$

Итак, в общем случае динамическое поведение элемента или САУ может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,F,t), & (1) \\ y = g(x), & (2) \\ \dot{u} = u(x,v), & (3) \end{cases}$$

где, $(^{\bullet}) = \dfrac{d}{dt}$;

$x \in R^n$ – вектор состояния;
$u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий;
$F \in R^l$ – вектор возмущающих воздействий;
$v \in R^m$ – вектор входных задающих воздействий;
f и g – в общем случае нелинейные векторные функции.

Зависимость (1) описывает поведение объектов управления как функция от текущего состояния x, u, F и в общем случае от t.

Зависимость (2) задаёт связь между физическими выходными величинами y и внутренними координатами состояния x.

Зависимость (3) определяет собой функцию устройства управления.

Блок-схема САУ, построенная по математической модели (1) – (3) имеет наиболее общий вид (рис.10).

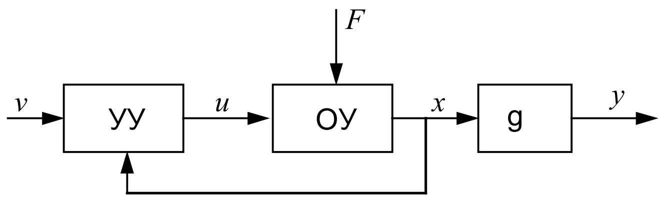


рис. 10

Примеры САУ

1. Система стабилизации (статическая система) (рис 11).

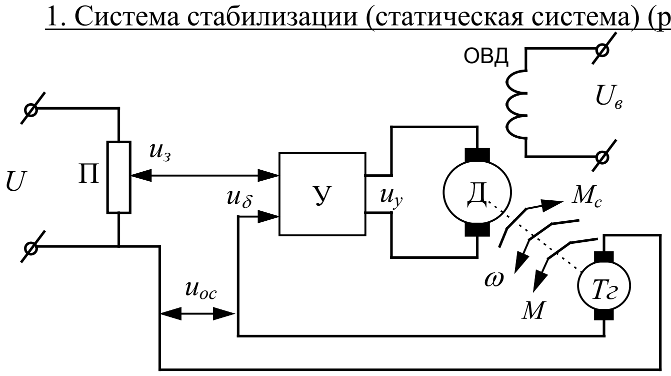


Рис.11

$u_з$ – напряжение задающего сигнала;
u_{oc} – напряжение обратной связи;
$u_δ$ – напряжение ошибки системы;
$u_у$ – выходное напряжение усилителя (напряжение управления);
$Тг$ – тахогенератор, измеритель скорости вращения двигателя ($U_{oc} = k_{Тг}\omega$);

При изменении момента сопротивления (нагрузки) двигателя в такой системе, его скорость вращения в установившемся режиме должна оставаться постоянной.

Т.е. M – var, ω – const (в определенном диапазоне изменения M, что обычно задаётся).

Ошибка системы: $u_\delta = u_з - u_{ос}$ (5)

Работа состоит в следующем: При $M_c\uparrow$, $\omega\downarrow$, $u_{ос}\downarrow$, $u_\delta\uparrow$, $u_y\uparrow$, $\omega\uparrow$ примерно до прежнего состояния.

В статических системах ошибка u_δ в установившемся режиме не может быть равна нулю. Т.е. эти системы характеризуются наличием статической ошибки, которая обычно задается при проектировании САУ и чем меньше эта ошибка, тем точнее осуществляется стабилизация выходной координаты системы.

2. Следящая система (астатическая система) (рис.12).

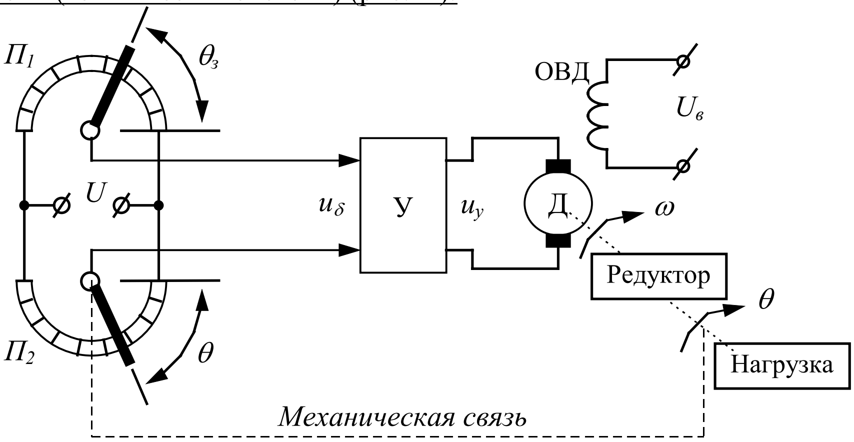


Рис.12

$П_1$ – задающий потенциометр (угол задания $\theta_з$);

В качестве измерителя угла поворота вала двигателя служит потенциометр $П_2$;

u_δ – напряжение ошибки, пропорциональное углам рассогласования следящей системы

$$u_\delta = k_n\,(\theta_з - \theta) \qquad (6)$$

Принимаем, что при $|u_y| \geq 0$ $|\omega| \geq 0$, т.е. зона нечувствительности отсутствует, в реальных же системах при $M_{нагр} \neq 0$ $|\omega| \geq 0$ при $|u_y| \geq a$.

Работа системы: На $П_1$ задаем $\theta_з$, появилось u_δ. и u_y, двигатель начал работать, приводя в движение через редуктор нагрузку, одновременно поворачивая движок потенциометра $П_2$ в сторону уменьшения рассогласования из (6). При достижении $\theta = \theta_з$, $u_\delta = 0$ и $u_y = 0$ работа двигателя прекращается.

Таким образом, в следящих или астатических системах, статическая ошибка равна нулю.

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Классификация линейных систем

Линейные системы можно разделить на три подкласса:

1. Системы с постоянными параметрами. Это такие системы, технические параметры которых (сопротивления, индуктивности, скорости вращения приводных двигателей и т.д.) остаются постоянными в течение времени работы САУ. Такие системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

2. Линейные системы с переменными во времени параметрами. Коэффициенты дифференциальных уравнений в этом случае являются известными функциями времени $r_k = f_k(t)$.

3. Линейные системы с чистым запаздыванием. Если в САУ содержится элемент чистого запаздывания (рис.13), где τ – время чистого запаздывания. (Магнитофонная головка, магнитный усилитель быстродействующий).

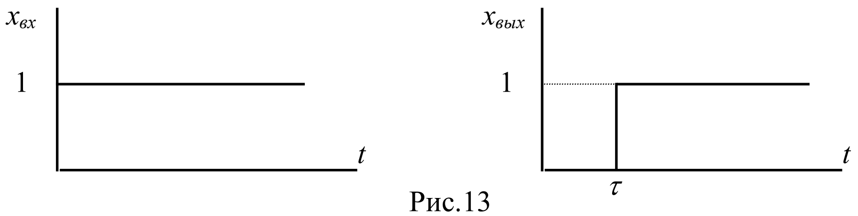


Рис.13

Линеаризация нелинейных функций

Как уже говорилось, в реальных системах обычно есть нелинейные элементы (кривые намагничивания, насыщения, гистерезис и т.п.), поэтому для перехода от реальной системы к идеализированной линейной необходимо произвести линеаризацию нелинейных характеристик системы.

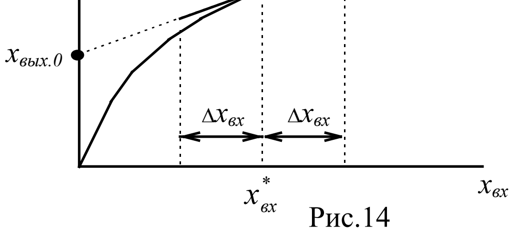
В основе линеаризации нелинейностей лежит предположение о том, что в исследуемой САУ переменные изменяются так, что их отклонения от установившихся значений остаются всё время достаточно малыми.

Достаточная малость отклонений переменных в системах стабилизации и следящих системах обычно выполняется, т.к. этого требует сама идея работы замкнутой автоматической системы.

Линеаризация может быть осуществлена:

– графическим способом;
– аналитическим способом.

1. Если имеем графическую зависимость вход-выход нелинейного звена системы, например в виде рис.14.
   1.1 Метод касательной. Установившийся режим соответствует точке $x^*_{вх}$ Проведя касательную в этой точке, отрезок кривой можно заменить прямой. Из графика видно, что чем больше отклонение входной величины от установившегося состояния, тем больше ошибка линеаризации (требование к качеству).



$$x_{вых} = f(x_{вх})$$

$$x_{вых} = x_{вых.0} + kx_{вх}$$

$$k = \frac{dx_{вых}}{dx_{вх}}\bigg|_{x_{вх}=x^*_{вх}}$$

Рис.14

1.2 Метод секущей. Если необходимо провести линеаризацию в области $0 \le x_{вх} \le x_{вх}^*$, то используется метод секущей (рис.15).

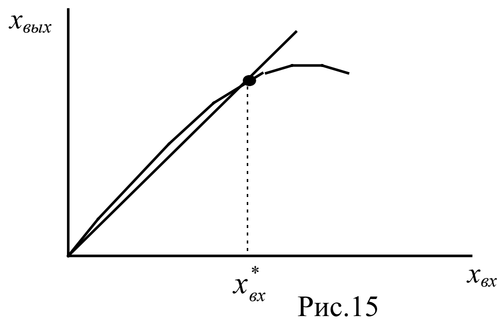


Рис.15

$$x_{вых} = k x_{вх},$$

где $k = \left.\dfrac{dx_{вых}}{dx_{вх}}\right|_{x_{вх}=0}$

2. Если нелинейная функция задана (известна) в виде математического (аналитического) описания, например $y = f(x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 – входные координаты и y допускает хотя бы одно дифференцирование по обеим координатам. Раскладываем эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки установившегося режима x_1^* и x_2^* при малых отклонениях Δx_1 и Δx_2.

$$y = f(x_1^*, x_2^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}} \cdot \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}} \cdot \Delta x_2 + \dots \qquad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой члены 1-го порядка ряда Тейлора нелинейной функции $y = f(x_1, x_2)$. Таким образом, исходную нелинейную зависимость двух переменных мы заменили линейной комбинацией отклонений от установившегося режима.

Линеаризация дифференциальных уравнений

Пусть нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее поведение нелинейного динамического объекта имеет вид:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}), \qquad \bar{x} \in R^n, \ \bar{u} \in R^m \qquad (1)$$

При линеаризации, как и ранее, в качестве рабочей точки выбирается точка установившегося режима или точка равновесного состояния.

Под установившемся состоянием понимаем такой режим работы, когда $\dot{\bar{x}} = 0$, т.е. в объекте не происходит никаких изменений:

$$f(\bar{x}_0, \bar{u}_0) = 0 \qquad (2)$$

где $\bar{x}_0, \bar{u}_0$ – соответственно, значения векторов состояния и управления в установившемся режиме (статике).

Далее, правую часть (1) раскладываем в ряд Тейлора в точке $\bar{x}_0, \bar{u}_0$ при малых изменениях $\Delta\bar{x}, \Delta\bar{u}$:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}_0, \bar{u}_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^T}\right]^0 \Delta\bar{x} + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{u}^T}\right]^0 \Delta\bar{u} + R \qquad (3)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix},$$

$$\dim \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^T} = n \times n, \qquad \dim \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^T} = n \times m.$$

Обозначим:

$$A=\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^{T}}\right]^{0}=\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^{T}}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0\\ \bar{u}=\bar{u}_0}};\qquad B=\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{u}^{T}}\right]^{0}=\frac{\partial f}{\partial \bar{u}^{T}}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0\\ \bar{u}=\bar{u}_0}}$$

Далее из (3) вычтем уравнение статики (2) и отбросим остаточный член R. Тогда получим:

$$\dot{\bar{x}}=A\Delta\bar{x}+B\Delta\bar{u}, \tag{4}$$

Введем обозначение:

$$\left.\begin{aligned} x&=\Delta\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}_0\\ u&=\Delta\bar{u}=\bar{u}-\bar{u}_0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тогда (4) с учётом (5) будет выглядеть так:

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{6}$$

Уравнение (6) – линейное дифференциальное уравнение в отклонениях.

Математическое описание линейных САУ

В общем, математическая модель линейной САУ, записанная в нормальной форме Коши, имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+DF,\\ y=Cx,\end{cases} \tag{1}$$

где $x\in R^{n}$, $u\in R^{m}$, $F\in R^{l}$, $y\in R^{m}$,

$\dim A=n\times n,\ \dim B=n\times m,\ \dim D=n\times l,\ \dim C=m\times n.$

В частном случае, если имеем скалярный объект, то его поведение в динамике описывается дифференциальным уравнением n-го порядка

$$a_n x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+a_{n-2}x^{(n-2)}+\ldots+a_1\dot{x}+a_0x=bu. \tag{2}$$

От модели (2) можно перейти к дифференциальным уравнениям состояния вида (1), если ввести независимые переменные состояния. Причем для объекта n-го порядка, число таких переменных может быть выбрано различно. Однако для независимости уравнений необходимо выбрать в качестве переменных состояния:

$$\begin{cases} x_1=x,\\ x_2=\dot{x}_1=\dot{x},\\ x_3=\dot{x}_2=\ddot{x},\\ \ldots\ldots\ldots\\ x_n=\dot{x}_{n-1}=x^{(n-1)}.\end{cases} \tag{3}$$

Решим (2) относительно старшей производной

$$x^{(n)}=-\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{(n-1)}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{(n-2)}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\dot{x}+\frac{a_0}{a_n}x\right)+\frac{b}{a_n}u \tag{4}$$

тогда (3) и (4) представляют нормальную форму Коши дифференциального уравнения (2).

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}x_n-\dfrac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1}-\ldots-\dfrac{a_1}{a_n}x_2-\dfrac{a_0}{a_n}x_1+\dfrac{b}{a_n}u\end{cases} \tag{5}$$

или в общем виде

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases} \tag{6}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{bmatrix};\; B=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \frac{b}{a_n}\end{bmatrix};\; C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}.$$

<u>Пример:</u>

$$\ddot{x}+2\dot{x}-3x=5u\,,$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x,\\ x_2 &= \dot{x}_1=\dot{x}\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1=x_2\,,\\ \dot{x}_2=-2x_2+3x_1+5u,\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases} \qquad \begin{aligned} &x\in R^2;\\ &u\in R^1.\end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Свободное поведение САУ

В начале отметим основное свойство линейных систем:

Принцип суперпозиции (наложения): Если на САУ одновременно действуют несколько сигналов, то результирующая реакция системы равна алгебраической сумме реакций системы на отдельные сигналы.

Итак, линейная САУ описывается в общем виде

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx\end{cases} \tag{1}$$

или в частном случае для скалярной системы

$$a_n x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+a_{n-2}x^{(n-2)}+\ldots+a_1\dot{x}+a_0x=bu\,. \tag{2}$$

Если в (1) или (2) положить u = 0, то получим уравнения, описывающие свободное движение системы (СДС). СДС – если после приложения возмущения, система предоставлена сама себе, т.е. на неё не действуют ни управляющие не возмущающие сигналы.

СДС определяется лишь параметрами системы и не зависит ни от каких входных сигналов.

Переходная матрица

Свободное поведение САУ характеризует переходная матрица.

Переходная матрица есть реакция системы на единичные начальные условия при нулевых входных воздействиях.

$\Phi=\Phi(t)$ – переходная функция времени определяется из решения матричного уравнения вида:

$$\dot{\Phi}=A\Phi \text{ при } \Phi(0)=I\,, \tag{3}$$

$\dim\Phi=n\times n$,

где I – единичная матрица.

Отметим некоторые свойства переходной матрицы (ПМ):

1. Определитель ПМ всегда ≠0, т.е.

   $\det\Phi(t)\neq 0,\ \forall t\in\left[0,\infty\right]$;

2. Матрица, обратная Ф равна самой матрице, но с аргументом обратного знака, т.е.

   $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$.

Для линейных систем переходная матрица представляет собой матричную экспоненту

$$\Phi(t)=e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nt^n}{n!}\,. \tag{4}$$

Т.к. (4) удовлетворяет (3), действительно $\dot{\Phi}(t)=Ae^{At}=A\Phi$.

Переходная матрица позволяет определить реакцию многосвязной системы на произвольные начальные условия.

Решение первого уравнения из системы (1) при произвольных начальных условиях тогда будет иметь вид:

$$x(t) = x(0)e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau \tag{5}$$

или выходная координата из второго уравнения (1)

$$y(t) = x(0)Ce^{At} + C\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau . \tag{6}$$

Модальные характеристики

Мода (англ.) – собственные значения и собственные вектора.

Модальные характеристики позволяют описывать собственные динамические свойства систем и находить свободную составляющую движения. Действительно, если объект описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

при начальных условиях $t_0 = 0,\ x_0 = x(0)$, то решение, как известно, имеет вид:

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{в}(t) \tag{2}$$

где $x_{св}(t)$ – свободная составляющая,

$x_{в}(t)$ –вынужденная составляющая.

Причем свободная составляющая получается из решения дифференциального уравнения.

$$\dot{x} = Ax . \tag{3}$$

Решение (3) можно представить в виде:

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} . \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3)

$$x(0)\lambda e^{\lambda t} = Ax(0)e^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda I - A)x(0) = 0 \tag{5}$$

Найдем λ и *x(0)* – соответствующие решению уравнения (5).

Уравнение (5) будет иметь решение, если

$$\det(\lambda I - A) = 0 . \tag{6}$$

Соотношение (6) представляет собой характеристическое уравнение, если раскрыть (6), то получаем:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 , \tag{7}$$

где n – порядок дифференциального уравнения исходной системы (1).

Решения (7) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического уравнения (собственные значения матрицы А). Подставляя корни λ_i в уравнение (5), получим:

$$(\lambda_i I - A)x_i(0) = 0 . \tag{8}$$

Можно определить значения всех компонент вектора *x(0)* – вектора начальных условий. Для λ_i существует собственный вектор динамической системы – $e_i \ (i = \overline{1,n})$.

Произведение $e^{\lambda_i t}e_i$ – мода системы.

Свободное движение динамической системы полностью определяется набором мод, т.е. существует определенная связь:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i(0))e^{\lambda_i t}e_i , \tag{9}$$

где f_i – определяется заданными начальными условиями $(i = \overline{1,n})$.

Часто для анализа свойств системы используют только собственные значения матрицы А (корни).

Как известно они могут быть: $\lambda_i = \pm a_i \pm jb_i ,\ \ i = \overline{1,n}$.

1. вещественные $\pm a_1;\ \pm a_2;\ \pm a_3;\ \ldots$
2. комплексные $\pm a_1 \pm jb_1;\ \pm a_2 \pm jb_2;\ \pm a_3 \pm jb_3;\ \ldots$

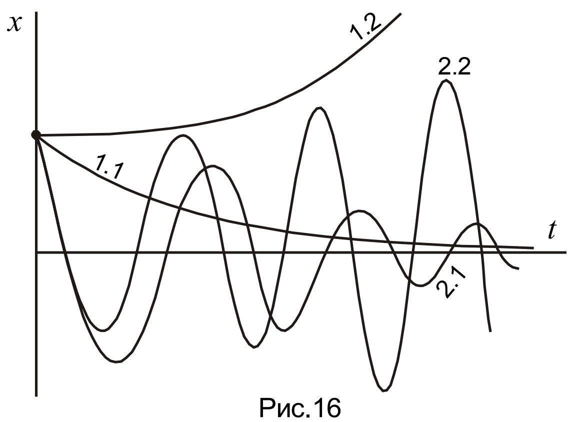


Рис.16

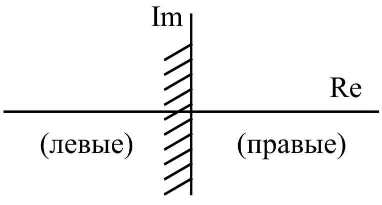


Рис.17

1.1. Если все корни вещественны и отрицательны $\lambda_i = -a_i$, $i = \overline{1,n}$, тогда имеем результирующую сходящуюся экспоненту (рис.16).

1.2. Если среди отрицательных вещественных корней имеется хотя бы один положительный, то процесс будет соответствовать расходящейся экспоненте.

2.1. Если корни комплексные и все с отрицательной вещественной частью $\lambda_i = -a_i \pm jb_i$, $i = \overline{1,n}$, то процесс колебательный затухающий (сходящийся).

2.2. Если все корни комплексные и хотя бы один из них имеет положительную вещественную часть, то имеем расходящийся колебательный процесс.

В ТАУ принято называть как вещественные, так и комплексные корни левыми, которые имеют отрицательную вещественную часть. Корни с положительной вещественной частью называются правыми. Их название ясно из рис.17.

Итак, для того, чтобы процесс был сходящимся (система линеаризованная была устойчива) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми.

Передаточные функции

Кроме дифференциальных уравнений в ТАУ используются различные их преобразования, т.к. решение дифференциальных уравнений высокого порядка вызывает значительные трудности. Решения дифференциальных уравнений исследуются косвенными методами. Наиболее удобна алгебраизация дифференциальных уравнений.

Формальным обоснованием алгебраизации служит интегральное преобразование Лапласа, Карсона-Хэвисайда и Фурье.

Полученная в результате преобразований динамическая характеристика есть *передаточная функция* (ПФ).

В общем случае передаточная функция есть соотношение между входными и выходными переменными объекта или системы в операторной форме при нулевых начальных условиях.

Примем в качестве оператора, оператор дифференцирования $p = \dfrac{d}{dt}$. Отметим, что передаточные функции существуют только для линейных объектов.

Пусть система описывается дифференциальными уравнениями состояния и выхода:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad x \in R^n,\ u \in R^m,\ y \in R^m \tag{1}$$

причем для реальных объектов $n > m$.

Первое уравнение (1) можно записать

$px(p) = Ax(p) + Bu(p) \quad \rightarrow \quad px - Ax = Bu$ или $(pI - A)x = Bu$, где

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 \end{bmatrix}$ – единичная матрица, $\dim I = n \times n$.

$x = (pI - A)^{-1} Bu(p)$, где $(pI - A)^{-1}$ – обратная матрица $(pI - A)$.

С учетом второго уравнения (1)

$$y(p) = C(pI - A)^{-1} Bu(p). \tag{2}$$

Обозначим $W(p) = C(pI - A)^{-1} B$ –передаточная функция (функция оператора от p).

$\dim W(p) = m \times m$ – т.к. y и u имеют m компонент.

$$W(p)=\begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \ldots & W_{1m}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \ldots & W_{2m}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \ldots & W_{mm}(p) \end{bmatrix}=\frac{y(p)}{u(p)}. \qquad (3)$$

Передаточная функция есть отношение оператора выходного сигнала к оператору входного сигнала при нулевых начальных условиях.

Матричная передаточная функция (3) показывает какими операторными выражениями связаны между собой компоненты вектора y и u.

$$y_i = W_{i1}(p)u_1 + \ldots + W_{ii}(p)u_i + \ldots + W_{im}(p)u_m. \qquad (4)$$

Если все u_j=0 и $i \neq j$ то $y_i = W_{ii}(p)u_i$.

$W_{ii}(p)$ – собственная передаточная функция i-го канала, отражает соотношение между i-м входом и выходом при нулевых остальных входах.

Если один из элементов матрицы ПФ (3) равен 0, то это означает, что в рассматриваемой системе связь между соответствующими компонентами вектора y и вектора u отсутствует.

Понятие передаточной функции было введено при изучении скалярных систем, а затем расширено на многосвязные.

Удобство этого понятия состоит в следующем:

1. Позволяет в алгебраической форме отобразить соотношение между входом и выходом.
2. Допускает простую структурную интерпретацию.
3. Позволяет выявить ряд типовых элементов САУ.
4. ПФ тесно связана с понятием частотной характеристики.

Одним из распространенных в ТАУ является операторный метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Преобразованием Лапласа называют преобразование функции $f(t)$ переменной t в функцию $F(p)$ другой переменной p с помощью интеграла

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = Л\left[f(t)\right]. \qquad (1)$$

Функция $f(t)$ называется оригиналом, $F(p)$ – изображением функции $f(t)$.

$p=\sigma + j\omega$ – оператор Лапласа (комплексное число).

Связь оригинала и изображения осуществляется записью $f(t) \doteq F(p)$.

Свойства преобразования по Лапласу.

1. Теорема суперпозиции: Изображение суммы равно сумме изображений слагаемых.
2. Изображение постоянной величины есть постоянная, деленная на оператор p.
3. Теорема линейности: Умножение оригинала на постоянную величину A влечет умножение изображения на эту постоянную. $Af(t) \doteq AF(p)$
4. Изображение производной n-го порядка соответствует умножению оператора p степени n на изображение функции при нулевых начальных условиях. $\frac{df^n(t)}{dt^n} \doteq p^n F(p)$
5. Изображение интеграла кратности n функции $f(t)$ соответствует умножению изображения функции на $\frac{1}{p^n}$ при нулевых начальных условиях. $\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(t)dt \doteq \frac{1}{p^n}F(p)$
6. Теорема подобия (изменение масштаба): Если аргумент функции умножен на постоянное число A, то это соответствует умножению на $\frac{1}{A}$ изображения и аргумента изображения. $f(At) \doteq \frac{1}{A}F(\frac{p}{A})$.

Передаточную функцию, используя свойства преобразований Лапласа, можно получить аналогично предыдущему: